

АНАЛИЗ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ RS-VARX

В. И. Малюгин

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

E-mail: Malugin@bsu.by

В статье описываются возможности анализа циклических изменений экономических временных рядов на основе многомерных эконометрических моделей векторной авторегрессии с экзогенными переменными и двумя циклически переключающимися классами состояний типа «подъем» и «спад» экономики (*Regime Switching VARX – RS-VARX*). Проводимый анализ осуществляется в контексте проблемы разработки системы раннего обнаружения моментов смены фаз экономического цикла, основанной на использовании опережающих индикаторов (*leading economic indicators*). В рамках исследования используются предлагаемые автором методы статистической классификации многомерных временных рядов и проверки гипотез.

Ключевые слова: модели RS-VARX, IS-VARX, MS-VARX, циклические изменения, независимые и зависимые классы состояний, классификация временных рядов, тестирование моментов структурных изменений.

МОДЕЛИ СЕМЕЙСТВА RS-VARX И ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ

Исследования, связанные с применением методов статистической классификации многомерных временных рядов, описываемых многомерными эконометрическими моделями типа векторной авторегрессии, для анализа экономических циклов, начались с работы [1]. Этот же подход для более широкого класса моделей с неоднородной эндогенно-экзогенной структурой развивается в работах [2–4, 7–9].

В рамках данного исследования задачи анализа экономических циклов решаются в предположении, что существует два класса состояний, которые соответствуют «росту» и «спаду» экономики. В качестве базовой эконометрической модели экономической системы используется модель векторной авторегрессии с экзогенными переменными и циклически изменяющимися классами состояний в случае известной и неизвестной модели смены классов состояний (*Regime Switching VARX – RS-VARX*) [5].

Модель RS-VARX. Пусть экономическая система в момент времени t характеризуется случайным вектором $y_t = (y_{t1}, \dots, y_{tm})' \in \mathbb{R}^n$ ($n > 1$), допускающим разбиение на подвекторы $x_t = (x_{t1}, \dots, x_{tN})' \in \mathbb{R}^N$ ($N > 1$) и $z_t = (z_{t1}, \dots, z_{tM})' \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^M$ ($M > 1$) эндогенных и экзогенных переменных соответственно, то есть

$$y_t = \begin{pmatrix} x_t \\ z_t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad n = N + M, \quad t = 1, \dots, T.$$

Векторный временной ряд $y_t \in \mathbb{R}^n$ описывается моделью *векторной авторегрессии* порядка p ($p \geq 1$) с *экзогенными переменными* (обозначается VARX(p)):

$$x_t = \sum_{i=1}^p A_{d(t)} x_{t-i} + B_{d(t)} z_t + \eta_{d(t),t}, \quad (1)$$

где $x_{1-p}, \dots, x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданные начальные значения; $\eta_{d(t),t} \in \mathbb{R}^T$ ($t = 1, \dots, T$) – независимые в совокупности гауссовские случайные ошибки наблюдения; $d_t \in S(L) = \{0, \dots, L-1\}$ – номер класса состояния экономической системы, $d = (d_t) \in S^T(L)$ – вектор состояний экономической системы в течение T моментов наблюдения.

Рассматриваются модели с переключающимися классами состояний RS-VARX, для которых $2 \leq L < s + 1$, где $s \geq 1$ – число структурных изменений, соответствующих смене классов состояний, в неизвестные моменты времени $1 < \tau_1 < \dots < \tau_s < T$. Относительно номеров классов состояний $d(t) \in S(L)$ ($t = 1, \dots, T$) возможны два типа предположений:

d.1. $d(t)$ ($t = 1, \dots, T$) – независимые в совокупности случайными величины (модель зависимости не известна) с распределением вероятностей

$$P\{d(t) = l\} = \pi_l > 0 \quad (l \in S(L)), \quad \sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1;$$

d.2. $d(t)$ ($t = 1, \dots, T$) – однородная цепь Маркова (ОЦМ) с распределением, которое определяется вектором вероятностей начального состояния π и матрицей вероятностей одношаговых переходов P соответственно:

$$\pi = (\pi_l), \quad \pi_l = \mathbf{P}\{d_1 = l\} > 0 \quad (l \in S(L)), \quad \sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1;$$

$$P = (p_{kl}) \quad (k, l \in S(L)), \quad p_{kl} = \mathbf{P}\{d_{t+1} = l \mid d_t = k\} \geq 0, \quad \sum_{l \in S(L)} p_{kl} = 1, \quad k \in S(L).$$

В предположении *d.1* модель (1) будем называть моделью с *независимыми случайными переключениями состояний* (Independence-Switching VARX – IS-VARX). В случае *d.2* имеет место модель VARX с *марковскими переключениями состояний* (Markov-Switching VARX – MS-VARX) [6].

Параметры $\{A_{d(t)}, B_{d(t)}, \Sigma_{d(t)}, \pi_l\}$ для модели IS-VARX и $\{A_{d(t)}, B_{d(t)}, \Sigma_{d(t)}, \pi_l\}$, π , P для модели MS-VARX вследствие структурных изменений могут частично либо полностью различаться для различных классов состояний $d(t) \in S(L)$. Истинные значения параметров моделей и моменты структурных изменений не известны.

Задачи анализа моделей RS-VARX.

Методы решения задач статистического оценивания параметров моделей RS-VARX и моментов структурных изменений $\{\tau_i\}$ ($i = 1, \dots, s$) в тестируемом временном ряде $\{y_t\}$ ($t = 1, \dots, T$) в рамках сделанных предположений описаны в [3, 8, 9]. Ниже приводятся результаты исследования некоторых возможностей данных методов при решении таких задач как:

- 1) оценивание моментов смены классов состояний экономической системы, описываемых моделью MS-VARX;
- 2) тестирование установленных моментов смены классов состояний экономической системы с целью исключения краткосрочных колебаний на основе статистических критериев проверки гипотез.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА

Оценивание моментов смены классов состояний для моделей IS-VARX и MS-VARX. В [7] для оценивания класса состояния экономической системы предлагается ис-

пользовать подстановочные байесовские решающие правила (ПБРП) поточечной классификации наблюдений, описываемых моделью VARX. Обучающие реализации для построения данных решающих правил можно получить в результате построения модели по имеющимся данным. В противном случае применяются самообучающиеся ПБРП, для построения которых применяются алгоритмы расщепления смесей распределений наблюдений (ЕМ-алгоритмы). Для модели IS-VARX с независимыми классами состояний соответствующие алгоритмы описываются в [3, 7]. Алгоритмы расщепления смесей распределений для модели MS-VARX в случае марковской зависимости состояний представлены в [8, 9].

Тестирование краткосрочных колебаний. Непосредственное применение выше перечисленных алгоритмов может не давать приемлемую точность оценивания моментов структурных изменений $\{\tau_i\}$ ($i = 1, \dots, s$). Возможно появление большого числа «ложных сигналов» о структурных изменениях, соответствующих краткосрочным колебаниям, а не смене состояния экономической системы. Доля «ложных сигналов» ограничена снизу вероятностью ошибки соответствующего *байесовского решающего правила* (БРП), оптимального в смысле минимума вероятности ошибки классификации [3]. В контексте проблемы анализа экономических циклов основной целью является установление структурных изменений, приводящих к смене классов состояний системы в соответствии с долгосрочными циклическими изменениями. В то время как краткосрочные колебания экономического состояния не должны приниматься во внимание. На этом основании после поточечной классификации временного ряда $\{y_t\}$ ($t = 1, \dots, T$) и получения оценок классов состояний $\{d_t\}$ предлагается использовать статистические критерии, которые позволяют с заданной вероятностью ошибки отличить «ложный сигнал» о структурном изменении от истинного, то есть – отличить краткосрочные колебания от циклических изменений. Проблема оценивания моментов смены состояний, при этом рассматривается как проблема тестирования моментов многократных структурных изменений. Для тестирования моментов структурных изменений в моделях IS-VARX и MS-VARX используется метод, описанный в [3, 8]. Данный метод реализуется с помощью двухэтапной процедуры. На первом этапе с помощью предлагаемого решающего правила классификации многомерных временных рядов, описываемых моделью IS-VARX или MS-VARX, оцениваются состояния системы с учетом модели зависимости классов состояний. На втором этапе полученная последовательность состояний тестируется с целью выявления «ложных сигналов» о смене состояния. Имеющиеся статистические данные используются для построения модели RS-VARX и соответствующих решающих правил классификации (ПБРП).

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведем результаты численных экспериментов, целью которых является исследование точности оценивания моментов смены состояний изменений в моделях IS-VARX и MS-VARX с помощью предлагаемых алгоритмов на модельных данных.

Описание тестовых экспериментов. Рассматриваются модели VARX с циклическими структурными изменениями в матрице регрессионных коэффициентов (второе уравнении модели), обусловленными наличием чередующихся классов состояний экономической системы. Используемые в экспериментах данные получены с помощью статистического моделирования при следующих предположениях.

Размерность модели: $L = 2, N = 2, M = 3$; число оцениваемых параметров равно 29.

Длина временных рядов ($T_0^L = T_1^L = T^L, T^E$), используемых для оценивания и тестирования решающего правила, варьируется от 100 до 200.

Матрицы авторегрессионных коэффициентов, ковариаций и переходных вероятностей:

$$A_1 = A_0 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \pi_0 = \pi_1 = 0.5, \quad P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}.$$

Матрицы коэффициентов регрессии для вариантов 1, 2, 3:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_0 + H,$$

$$1) \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1.5 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

то есть структурное изменение касается только параметров второго уравнения.

Экзогенные переменные. Вектор экзогенных переменных $z_t = (z_{ij}) \in \mathbf{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$ является случайным и имеет равномерное распределение в области $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^M \in \mathfrak{R}^M$, $Z = [1, 10]$. Рассматриваются три варианта спецификации модели RS-VARX, различающиеся сложностью задачи обнаружения структурных изменений.

Степень сложности задачи характеризуется значением межклассового расстояния $\Delta(\tilde{z}) = \sqrt{\tilde{z}'(B_1 - B_0)' \Sigma^{-1} (B_1 - B_0) \tilde{z}}$ [3] в точке $\tilde{z} \in \mathbf{Z}$, которая соответствует среднему значению вектора экзогенных переменных, то есть $\tilde{z} = (5.5, 5.5, 5.5)'$.

Характеристики точности оценивания моментов структурных изменений. Алгоритмы классификации тестировались по результатам $K = 1000$ независимых прогонов для каждого набора значений параметров (тестового примера – ТП), В ходе прогона k ($k = 1, \dots, K$, $K = 1000$) в результате классификации экзаменационной выборки $\{X_t, Z_t\}$ ($t = 1, \dots, T^E$) вычисляются: $\{\hat{d}_t^E\}$ ($t = 1, \dots, T^E$) – оценки номеров классов состояний; $s^{(k)}$ – оценка числа структурных изменений s ; $\Delta_s^{(k)} = s^{(k)} - s$ – случайное отклонение оценки числа структурных изменений от истинного значения. Эмпирическое распределение отклонений $\{\Delta_s^{(k)}\}$ рассчитанное по $K = 1000$ прогонам:

$$\hat{p}_s(i) = \hat{\mathbf{P}}\{\Delta_s = i\} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \delta_{\Delta_s^{(k)}, i}, \quad i = 0, 1, \dots, \Delta_s^{\max}, \quad \Delta_s^{\max} = \max_k \Delta_s^{(k)}.$$

Оценивание моментов смены классов состояний. Значения межклассовых расстояний $\Delta(\tilde{z})$, соответствующих условным вероятностям ошибок классификации $r_0(\tilde{z})$ для БРП и долей «ложных сигналов» о структурных изменениях тестируемых реализаций приведены в табл. 1. На рис. 1 для иллюстрации представлен график эмпирического распределения $\hat{p}_s(i)$ для варианта 3 в случае марковской зависимости классов состояний.

Таблица 1

Характеристики сложности задачи классификации

Вариант	$\Delta(\tilde{z})$	$r_0(\tilde{z})$	Ожидаемая доля ложных сигналов на 1000 наблюдений
1	1.23	0.269	269
2	2.46	0.109	109
3	4.92	0.007	7

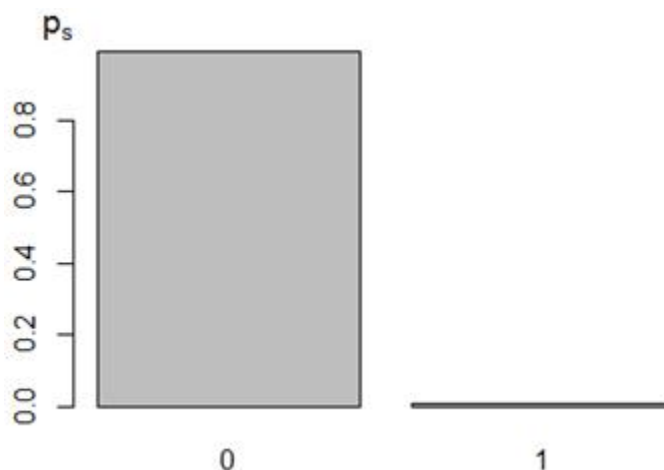


Рис. 1. Эмпирическое распределение отклонения оценки числа структурных изменений от истинного значения $\{\Delta_s^{(k)}\}$ ($l = 1, \dots, s$, $k = 1, \dots, 1000$)

Тестирование моментов смены состояний. Проиллюстрируем результаты применения алгоритма тестирования моментов структурных изменений в моделях IS-VARX и MS-VARX (1), приводящих к смене состояния системы. В табл. 2 для описываемых вариантов значений параметров моделей приводятся: оценка \hat{s} числа структурных изменений s и скорректированная оценка \hat{s}_{adj} , не учитывающая краткосрочные колебания. Последовательности оценок классов состояний $\{\hat{d}_t^E\}$ ($t = 1, \dots, T^E$) и значение \hat{s} получено в результате классификации временного ряда $\{y_t\}$ ($t = 1, \dots, T^E$) с помощью алгоритма EM MS-VARX [9], а скорректированная оценка \hat{s}_{adj} – в результате дополнительного тестирования оцененной последовательности номеров классов $\{\hat{d}_t^E\}$ ($t = 1, \dots, T^E$) с помощью предлагаемого алгоритма [3, 8]. Как видно из табл. 2, число смен состояний, выявленных с помощью алгоритма EM MS-VARX, принимает значения от 12 до 22. Применение алгоритма тестирования приводит к их сокращению.

Дадим графическую интерпретацию результатов алгоритма тестирования. На рис. 2 приводятся временные ряды эндогенных переменных x_{t1} , x_{t2} ($t = 1, \dots, T^E$) для ТП.3. Жирные линии соответствуют долгосрочным циклическим компонентам временных рядов, полученным с помощью фильтра Ходрика – Прескотта [10]. Структурные изменения, в соответствии с условиями рассматриваемого примера, имеют место в параметрах уравнения для временного ряда x_{t2} .

Графику сглаженного временного ряда x_{t2} соответствует жирная линия. Данную переменную можно рассматривать как опережающий индикатор по отношению к переменной x_{t1} (бледная линия).

Таблица 2

Результаты тестирования моментов смены состояний

Тестовые примеры	$\Delta(\bar{z})$	T^L	T^E	Модель	ϵ	s	\hat{s}	\hat{s}_{adj}
ТП 1	1.23	100	200	IS-VARX	–	12	22	6
ТП 2	4.92	100	200	IS-VARX	–	12	12	6
ТП 3	2.46	200	200	MS-VARX	0.05	12	22	6
ТП 4	4.92	200	200	MS-VARX	0.05	12	12	6

В результате классификации временного ряда $\{y_t\}$ ($t = 1, \dots, T^E$) с помощью алгоритма EM MS-VARX [16] получены оценки номеров классов состояний $\{\hat{d}_t^E\}$ ($t = 1, \dots, T^E$) и оценка числа структурных изменений \hat{s} . Скорректированная оценка \hat{s}_{adj} находится в результате применения к $\{\hat{d}_t^E\}$ ($t = 1, \dots, T^E$) алгоритма тестирования моментов структурных изменений.

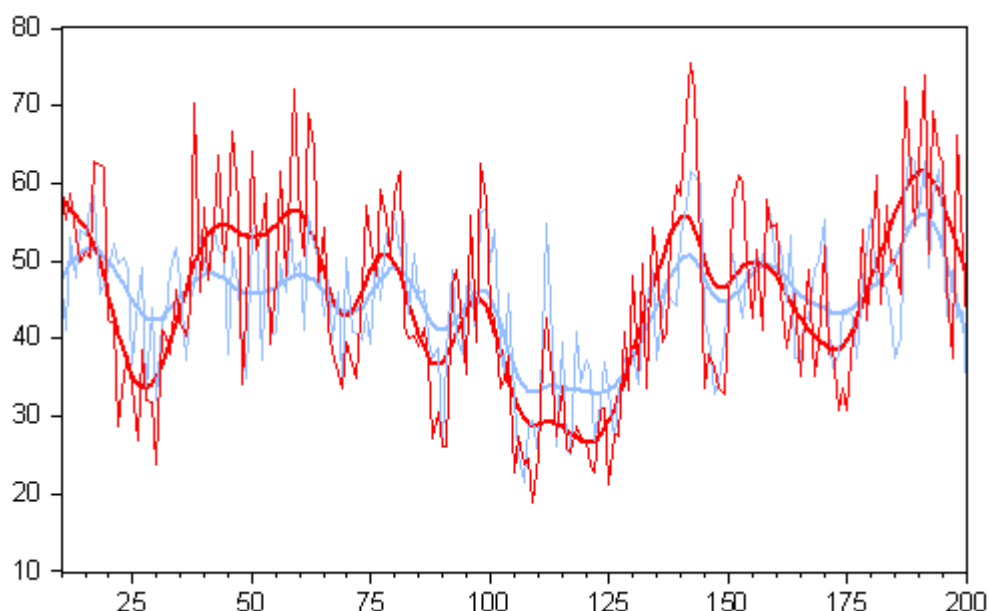


Рис. 2. Временные ряды эндогенных переменных x_{t1}, x_{t2} ($t = 1, \dots, T^E$) до и после сглаживания

Применение данного алгоритма позволяет исключить моменты структурных изменений, соответствующие трем краткосрочным колебаниям (отмечены на графике стрелкой), в результате чего число переключений состояний сократилось до 6. В табл. 3 приводятся оценки моментов структурных изменений до (моменты $\{\hat{\tau}_t\}$) и после (моменты $\{\hat{\tau}_t^{adj}\}$) применения алгоритма тестирования моментов структурных изменений. На рис. 3 помимо сглаженных временных рядов приводятся графики временных рядов $\{\hat{d}_t^E\}$ ($t = 1, \dots, T^E$) и $\{\hat{d}_t^{adj}\}$ ($t = 1, \dots, T^E$), которые соответствуют номерам классов состояний до исключения краткосрочных колебаний (отмечены на графике стрелкой) и после. Первый класс состояния экономической системы соответствует фазе «подъема», а второй – фазе «спада». Номера классов откладываются на правой оси ординат.

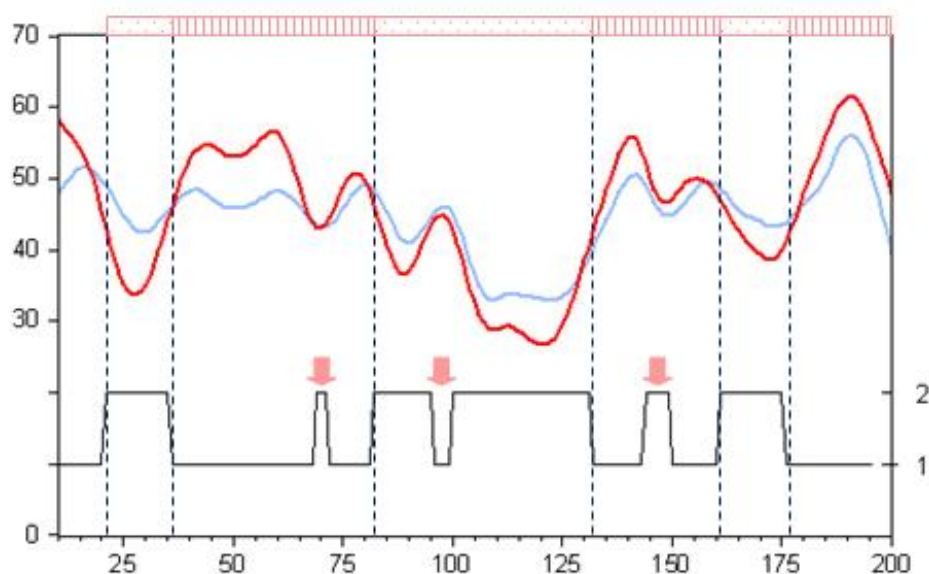


Рис. 3. Сглаженные временные ряды эндогенных переменных и фазы цикла:

■■■■■ – фаза «подъема», ■■■■■ – фаза «спада»

Таблица 3

Результаты тестирования моментов смены состояний

$\{\hat{\tau}_l\}$	21	36	69	72	82	96	100	132	144	150	161	176
$\{\hat{\tau}_l^{adj}\}$	21	37	–	–	82	–	–	133	–	–	161	177

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье на модельных и реальных данных белорусской экономики демонстрируются возможности моделей RS-VARX для решения таких задач как: оценивание моментов смены классов состояний экономической системы, и установление циклического характера изменений совместно анализируемых временных рядов на основе методов статистической классификации временных рядов; тестирование моментов смены классов состояний экономической системы с целью исключения краткосрочных колебаний; совместное моделирование базового макроэкономического индикатора и опережающего индикатора на основе моделей VARX с целью верификации выбора опережающего индикатора, датировки поворотных точек и определения периода упреждения смены состояний экономической системы на основе опережающего индикатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hamilton, J. D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle / J. D. Hamilton // *Econometrica*. 1989. V. 57(2). P. 357–384.
2. Малюгин, В. И. Об оптимальности классификации случайных наблюдений, различающихся уравнениями регрессии / В. И. Малюгин, Ю. С. Харин // *Автоматика и телемеханика*. 1986. № 7. С. 61–69.
3. Малюгин, В. И. Методы анализа многомерных эконометрических моделей с неоднородной структурой / В. И. Малюгин. Мн. : БГУ, 2014. 351 с.
4. Малюгин, В. И. Дискриминантный анализ многомерных авторегрессионных моделей с неоднородной структурой / В. И. Малюгин // *Известия НАН Беларуси. Серия 1: Физ. Мат. Информ.* 2013. № 3. С. 43–53.

5. *Hamilton, J. D.* Regime switching models /J. D. Hamilton // In : S. N. Durlauf, L. E. Blume (eds). New Palgrave Dictionary of Economics. 2nd Edition. Basingstoke : Palgrave Macmillan, 2008. P. 1755–1804.
6. *Sims, C. A.* Methods for Inference in Large Multiple-Equation Markov-Switching Models / C. A. Sims, D. F. Waggoner, T. Zha // Journal of Econometrics. 2008.V. 146(2). P. 255–274.
7. *Малюгин, В. И.* Дискриминантный анализ многомерных авторегрессионных моделей с неоднородной структурой / В. И. Малюгин // Известия НАН Беларуси. Серия 1: Физ. Мат. Информ. 2013. № 3. С. 43–53.
8. *Малюгин, В. И.* Анализ структурных изменений в многомерных эконометрических моделях на основе статистических решающих правил / В. И. Малюгин // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Мн. : БГУ, 2014. С. 124–129.
9. *Новопольцев, А. Ю.* Эконометрическое прогнозирование на основе многомерных регрессионных моделей с несколькими классами состояний / А. Ю. Новопольцев, В. И. Малюгин // Экономика, моделирование, прогнозирование: Сб. науч. трудов НИЭИ. Вып. 8. 2014.
10. *Nilsson, R.* Cycle Extraction. A comparison of the Phase-Average Trend method, the Hodrick-Prescott and Christiano-Fitzgerald filters / R. Nilsson, G. Gyomai // OECD. Working Paper, 2008.